INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

Mai 1985. — Option MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

I.

Préliminaire

Soient g une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et α une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, toutes deux continûment différentiables. On pose, pour tout x dans $\mathbb{R}$:

$$G(x) = \int_0^{\alpha(x)} g(t, x)\, dt$$

I. 1° Montrer que G est dérivable, en prenant soin de donner l'énoncé précis du, ou des théorèmes utilisés.

I 2° Calculer la dérivée de G.

Dans tout le problème, si x (resp. y) est un vecteur de $\mathbb{R}^N$, x_i (resp. y_i) désignera sa $i^{ème}$ composante, $i = 1, \ldots, N$.

II

On se propose dans cette question d'étudier les fonctions f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient :

(1) Pour tout y de $\mathbb{R}^2$, les applications partielles $x_1 \to f(x_1, y_2)$ et $x_2 \to f(y_1, x_2)$ sont croissantes sur $\mathbb{R}$,

et qui sont solutions de l'équation intégrale :

$$(2)\quad \forall x \in \mathbb{R}^2,\ \int_{-x_2}^{x_1} f(t_1, x_2)\, dt_1 + \int_{-x_1}^{x_2} f(x_1, t_2)\, dt_2 = (x_1 + x_2) f(x).$$

II 1° Si $f(x)$ ne dépend que de $x_1 + x_2$, montrer que (2) équivaut à l'existence de constantes K_1, K_2, K_3 telles que :

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = K_1 (x_1 + x_2) & \text{si } x_1 + x_2 > 0 \\ \qquad\quad = K_2 & \text{si } x_1 + x_2 = 0 \\ \qquad\quad = K_3 (x_1 + x_2) & \text{si } x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$$

Montrer que (1) est alors équivalent à :

$$K_1 \geqslant 0,\quad K_2 = 0 \quad \text{et} \quad K_3 \geqslant 0.$$

II. 2° Montrer que toute fonction continue f solution de (2) vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \qquad x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

II. 3° Montrer que si f, solution de (2), est de classe $\mathcal{C}^2$ (deux fois continûment différentiable) alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) = 0$$

II. 4° En déduire que toute fonction de classe $\mathcal{C}^2$ qui vérifie (1) et (2) peut s'écrire :

$$(3)\qquad f(x) = \varphi(x_1) - \varphi(-x_2)$$

où φ est croissante, de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

II. 5° Si φ n'est plus supposée de classe $\mathcal{C}^2$ mais seulement croissante, montrer que (3) définit une fonction f qui vérifie (1), (2). On prendra soin de justifier que le membre de gauche de l'équation (2) a bien un sens.

II. 6 Montrer que la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \varphi_0(x_1) - \varphi_0(-x_2) & \text{si } x_1 + x_2 \leqslant 0 \\ \qquad = \varphi_1(x_1) - \varphi_1(-x_2) & \text{sinon} \end{cases}$$

est solution de (1), (2) dès que φ_0 et φ_1 sont des fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

III

On s'intéresse maintenant à la généralisation à $\mathbb{R}^N$ (avec $N \geqslant 3$) de l'équation fonctionnelle (2). On introduit tout d'abord la notation suivante :

Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^N$, i un indice entier compris entre 1 et N, et y_i un réel; on notera :

$$x_{-i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$$

le vecteur de $\mathbb{R}^{N-1}$ obtenu en supprimant la $i^{ème}$ composante de x, et :

$$(x_{-i}, y_i) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$$

le vecteur de $\mathbb{R}^N$ obtenu en remplaçant la $i^{ème}$ composante du vecteur x par y_i.

On recherche les fonctions de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient :

(4) $\forall\, i \in \{1, \ldots, N\}$ $\forall\, x_{-i} \in \mathbb{R}^{N-1}$ l'application partielle $x_i \to f(x)$ est croissante.

(5) $$\forall\, x \in \mathbb{R}^N \quad \sum_{i=1}^{N} \int_{-\sum x_j}^{x_i} f(x_{-i}, t_i)\, dt_i = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right) f(x)$$

III 1° Dans le cas où $f(x)$ ne dépend que de $\sum_{i=1}^{N} x_i$, montrer que (5) équivaut à l'existence de constantes C_1, C_2, C_3 telles que :

$$\begin{cases} f(x) = C_1 \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^{N-1} & \text{si } \sum_{i=1}^{N} x_i > 0 \\ = C_2 & \text{si } \sum_{i=1}^{N} x_i = 0 \\ = C_3 \left|\sum_{i=1}^{N} x_i\right|^{N-1} & \text{si } \sum_{i=1}^{N} x_i < 0 \end{cases}$$

Montrer que (4) est alors équivalent à :

$$C_1 \geqslant 0, \quad C_2 = 0 \quad \text{et} \quad C_3 \leqslant 0.$$

III 2° Montrer que toute solution f continue de (5) vérifie :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^N, \quad \sum_{i=1}^{N} x_i = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

On notera H_0 l'hyperplan de $\mathbb{R}^N$ d'équation :

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 0$$

III 3° Soit f, de classe $\mathcal{C}^1$, solution de (5). Montrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^N \quad \sum_{i=1}^{N-1} \int_{-\sum_{j \neq i} x_j}^{x_i} \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_{-i}, s_i)\, ds_i = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right) \frac{\partial f}{\partial x_N}(x)$$

En déduire que :

$$\forall\, x \in H_0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_N}(x) = 0$$

III. 4° Soit x_N fixé. On pose, pour y dans $\mathbb{R}^{N-1}$:

$$g(y; x_N) = \frac{\partial f}{\partial x_N}\left(y_1 - \frac{x_N}{N-1}, y_2 - \frac{x_N}{N-1}, \ldots, y_{N-1} - \frac{x_N}{N-1}, x_N\right)$$

où f est de classe $\mathcal{C}^1$, solution de (5).

Montrer que :

$$\forall\, x_N \in \mathbb{R} \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^{N-1} \quad \sum_{i=1}^{N-1} \int_{-\sum_{j \neq i} y_j}^{y_i} g(y_{-i}, t_i; x_N)\, dt_i = \left(\sum_{i=1}^{N-1} y_i\right) g(y; x_N).$$

Remarque : Si $y \in \mathbb{R}^{N-1}$ alors $y_{-i} \in \mathbb{R}^{N-2}$ (cf. Partie III, page 3).

III. 5° En déduire, par récurrence sur N, que pour toute solution f de (5), de classe $\mathcal{C}^N$, on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^N \quad \frac{\partial^N f}{\partial x_1\, \partial x_2 \ldots \partial x_N}(x) = 0$$

Pour tout sous-ensemble $\{i_1, \ldots, i_k\}$ de $\{1, \ldots, N\}$ de cardinal $k \leqslant N-2$, montrer que l'on a :

$$\forall\, x \in H_0 \quad \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}(x) = 0$$

IV

On s'intéresse dans cette question aux solutions de (4), (5) qui sont du type :

$$(6) \qquad \begin{cases} f(x) = 1_A(x) = 1 & \text{si } x \in A \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où A est un ouvert non vide quelconque de $\mathbb{R}^N$.

IV. 1° Dans cette question *seulement* A est défini de la manière suivante : soit a élément quelconque de H_0 :

$$A = \{ x = (x_1, \ldots, x_N) / \forall i \in \{1, \ldots, N\}, \ x_i > a_i \}$$

Montrer que (6) définit une solution de (4), (5).

Soit désormais A ouvert non vide quelconque de $\mathbb{R}^N$ tel que (6) définit une solution de (4), (5).

IV. 2° Montrer que :

$$\forall x \in A, \quad \forall y \in \mathbb{R}^N, \ ((y - x) \in (\mathbb{R}^+)^N \Rightarrow y \in A)$$

On note :

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^N, \quad \sum_{i=1}^{N} x_i > 0 \right\}$$

Montrer que : $A \subset D$.

IV. 3° Pour x quelconque dans $\mathbb{R}^N$ et i dans $\{1, \ldots, N\}$ on pose :

$$A_i(x_{-i}) = \{ y_i \in \mathbb{R}, \ (x_{-i}, y_i) \in A \}$$

Montrer que si $A_i(x_{-i})$ est non vide, il est minoré. On posera alors $\alpha_i(x_{-i}) = \text{Inf } A_i(x_{-i})$, que l'on prendra par convention égal à $+\infty$ quand $A_i(x_{-i})$ est vide. Montrer que $\alpha_i(x_{-i})$ est une fonction de $\mathbb{R}^{N-1}$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que chaque application partielle associée à α_i est décroissante, si l'on a muni $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ de la relation d'ordre naturelle :

$$y_1 \leqslant y_2 \Leftrightarrow \{ y_2 = +\infty \text{ ou } (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } y_1 \leqslant y_2 \}$$

IV. 4° Montrer que :

$$\forall x \in A \quad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(x_{-i}) = 0$$

IV. 5° En déduire, en utilisant la décroissance de α_i que :

$$\exists a \in H_0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, N\} \quad \begin{cases} \alpha_i(x_{-i}) = a_i & \text{si } \forall j \neq i \quad x_j > a_j \\ = +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Démontrer la réciproque de la question IV. 1°.

V

On se concentre pour terminer sur le cas N = 3. Soit f solution de (5),

de classe $\mathcal{C}^3$ sur $D = \left\{ x \in \mathbb{R}^3, \quad \sum_{i=1}^{3} x_i > 0 \right\}$

V. 1° Montrer, en utilisant la question III. 5°, qu'il existe une fonction φ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que :

$$(7) \qquad \forall x \in D, \quad f(x) = \int_{-(x_2 + x_3)}^{x_1} \int_{-(s + x_3)}^{x_2} \varphi(s, t) \, dt \, ds$$

V. 2° Montrer que si f vérifie aussi (4) alors φ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

V. 3° Réciproquement soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ continue et f définie sur D par (7), et prolongée à $\mathbb{R}^3$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } \sum_{i=1}^{3} x_i = 0 \\ f(x) = -f(-x) & \text{si } \sum_{i=1}^{3} x_i < 0 \end{cases}$$

Montrer, en supposant que l'on peut permuter l'ordre d'intégration dans (7), que f est solution de (4), (5). On pourra commencer par établir les égalités suivantes, pour tout x de $\mathbb{R}^3$:

$$\int_{-(x_2 + x_3)}^{x_1} f(x_{-1}, t_1) \, dt_1 = \int_{-(x_2 + x_3)}^{x_1} \int_{-(s + x_3)}^{x_2} (x_1 - s) \varphi(s, t) \, ds \, dt$$

$$\int_{-(x_1 + x_3)}^{x_2} f(x_{-2}, t_2) \, dt_2 = \int_{-(x_2 + x_3)}^{x_1} \int_{-(s + x_3)}^{x_2} (x_2 - t) \varphi(s, t) \, ds \, dt$$

$$\int_{-(x_1 + x_2)}^{x_3} f(x_{-3}, t_3) \, dt_3 = \int_{-(x_2 + x_3)}^{x_1} \int_{-(s + x_3)}^{x_2} (x_3 + t + s) \varphi(s, t) \, ds \, dt$$